第 22 講　三角形の五心とベクトル

22　実数 α，β に対して $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおく．次の各条件を満たす α と β の値を求めよ．ただし，(2)と(5)では $\mathrm{AB}=c$，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$ を用いよ．

(1)　P は三角形 ABC の重心

(2)　P は三角形 ABC の内心

(3)　P(＝H) は三角形 ABC の垂心

(4)　P は三角形 ABC の外心

(5)　P は直線 AB に関して点 C と反対側にある傍心

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第22講　三角形の五心とベクトル

22 A(3, 0, 0), B(0, 4, 0), C(0, 0, 4) とするとき，三角形ABCの重心，内心，垂心，外心をそれぞれ求めよ.

【選択肢】

㋐ 重心 $\left(1,\ \frac{4}{3},\ \frac{4}{3}\right)$，内心 $\left(\frac{30\sqrt{2}-24}{17},\ \frac{50-20\sqrt{2}}{17},\ \frac{50-20\sqrt{2}}{17}\right)$，

垂心 $\left(\frac{24}{17},\ \frac{18}{17},\ \frac{18}{17}\right)$，外心 $\left(\frac{27}{34},\ \frac{25}{17},\ \frac{25}{17}\right)$

㋑ 重心 (4, 3, 4)，内心 $\left(\frac{24}{17},\ \frac{20\sqrt{2}}{17},\ \frac{20\sqrt{2}}{17}\right)$，垂心 $\left(\frac{18}{17},\ \frac{18}{17},\ \frac{24}{17}\right)$，

外心 $\left(\frac{27}{34},\ \frac{25}{17},\ \frac{25}{34}\right)$

㋒ 重心 $\left(\frac{4}{3},\ 1,\ \frac{4}{3}\right)$，内心 $\left(\frac{30\sqrt{2}}{17},\ \frac{50}{17},\ \frac{50}{17}\right)$，垂心 $\left(\frac{18}{17},\ \frac{24}{17},\ \frac{18}{17}\right)$，

外心 $\left(\frac{27}{17},\ \frac{25}{17},\ \frac{25}{17}\right)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 22 講　三角形の五心とベクトル

22　実数 α, β に対して $\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ とおく．次の各条件を満たす α と β の値を求めよ．ただし，⑵と⑸では $AB=c$，$BC=a$，$CA=b$ を用いよ．

⑴　P は三角形 ABC の重心

⑵　P は三角形 ABC の内心

⑶　P(＝H) は三角形 ABC の垂心

⑷　P は三角形 ABC の外心

⑸　P は直線 AB に関して点 C と反対側にある傍心

【答】　⑴ $\alpha=\beta=\dfrac{1}{3}$　⑵ $\alpha=\dfrac{b}{a+b+c}$，$\beta=\dfrac{c}{a+b+c}$

⑶ $\alpha=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}(|\overrightarrow{AC}|^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$，$\beta=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}(|\overrightarrow{AB}|^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$

⑷ $\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{AC}|^2(|\overrightarrow{AB}|^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})}{2\{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2\}}$，$\beta=\dfrac{|\overrightarrow{AB}|^2(|\overrightarrow{AC}|^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})}{2\{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2\}}$

⑸ $\alpha=\dfrac{b}{a+b-c}$，$\beta=-\dfrac{c}{a+b-c}$

【解答】

⑴　辺 AB，AC の中点をそれぞれ M，N とすると，P は線分 MC 上の点より実数 u を用いて

$$\overrightarrow{AP}=(1-u)\overrightarrow{AM}+u\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(1-u)\overrightarrow{AB}+u\overrightarrow{AC}$$

と表せ，また P は線分 BN 上の点より実数 t を用いて

$$\overrightarrow{AP}=(1-t)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AN}=(1-t)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}t\overrightarrow{AC}$$

と表せる．

よって

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}(1-u)=1-t\\[2mm] u=\dfrac{1}{2}t\end{cases}$$

より，$t=\dfrac{2}{3}$，$u=\dfrac{1}{3}$ を得る．

ゆえに

$$\boldsymbol{\alpha=\beta=\frac{1}{3}}$$

⑵　直線 AP は ∠CAB を二等分するので，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{AP}=k\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{c}+\frac{\overrightarrow{AC}}{b}\right)=\frac{k}{c}\overrightarrow{AB}+\frac{k}{b}\overrightarrow{AC}$$

と表せ，直線 BP は ∠ABC を二等分するので，実数 l を用いて

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=l\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{c}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{a}\right)$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\left(1-\frac{l}{c}-\frac{l}{a}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{l}{a}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

と表せる.

よって $\begin{cases}\dfrac{k}{c}=1-\dfrac{l}{c}-\dfrac{l}{a}\\ \dfrac{k}{b}=\dfrac{l}{a}\end{cases}$ より，$k=\dfrac{bc}{a+b+c}$，$l=\dfrac{ca}{a+b+c}$ を得る.

ゆえに

$$\boldsymbol{\alpha=\frac{b}{a+b+c},\ \beta=\frac{c}{a+b+c}}$$

(3)　CH⊥AB より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=(\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\&=(\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\&=\alpha|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+\beta\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0\end{aligned}$$

BH⊥AC より同様に

$$\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\beta|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$$

を得るので，これら2式より

$$\boldsymbol{\alpha=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}(|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2},\ \beta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}(|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}}$$

(4)　辺 AB の中点を M，辺 AC の中点を N とすると，MP⊥AB より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\&=\left(\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\&=\alpha|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+\beta\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=0\end{aligned}$$

NP⊥AC より同様に

$$\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\beta|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=0$$

を得るので，これら2式より

$$\boldsymbol{\alpha=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2(|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})}{2\{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2\}},\ \beta=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2(|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})}{2\{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2\}}}$$

(5)　直線 AP は ∠CAB の外角を二等分するので，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{c}+\frac{-\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{b}\right)=\frac{k}{c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\frac{k}{b}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

と表せ，直線 BP は ∠ABC の外角を二等分するので，実数 l を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=l\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{c}+\frac{-\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{a}\right)$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\left(1-\dfrac{l}{c}+\dfrac{l}{a}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\dfrac{l}{a}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

と表せる．よって

$$\begin{cases} \dfrac{k}{c}=1-\dfrac{l}{c}+\dfrac{l}{a} \\ -\dfrac{k}{b}=-\dfrac{l}{a} \end{cases}$$

より，$k=\dfrac{bc}{a+b-c}$，$l=\dfrac{ca}{a+b-c}$ を得る．

ゆえに

$$\boldsymbol{\alpha=\frac{b}{a+b-c},\quad \beta=-\frac{c}{a+b-c}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 22 講　三角形の五心とベクトル

22　A(3, 0, 0), B(0, 4, 0), C(0, 0, 4) とするとき，三角形 ABC の重心，内心，垂心，外心をそれぞれ求めよ．

【選択肢】

㋐　重心 $\left(1,\ \frac{4}{3},\ \frac{4}{3}\right)$，内心 $\left(\frac{30\sqrt{2}-24}{17},\ \frac{50-20\sqrt{2}}{17},\ \frac{50-20\sqrt{2}}{17}\right)$，
垂心 $\left(\frac{24}{17},\ \frac{18}{17},\ \frac{18}{17}\right)$，外心 $\left(\frac{27}{34},\ \frac{25}{17},\ \frac{25}{17}\right)$

㋑　重心 (4, 3, 4)，内心 $\left(\frac{24}{17},\ \frac{20\sqrt{2}}{17},\ \frac{20\sqrt{2}}{17}\right)$，垂心 $\left(\frac{18}{17},\ \frac{18}{17},\ \frac{24}{17}\right)$，
外心 $\left(\frac{27}{34},\ \frac{25}{17},\ \frac{25}{34}\right)$

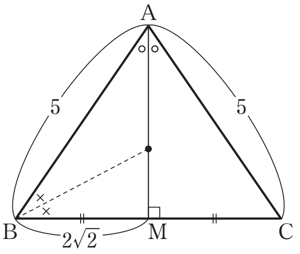
㋒　重心 $\left(\frac{4}{3},\ 1,\ \frac{4}{3}\right)$，内心 $\left(\frac{30\sqrt{2}}{17},\ \frac{50}{17},\ \frac{50}{17}\right)$，垂心 $\left(\frac{18}{17},\ \frac{24}{17},\ \frac{18}{17}\right)$，
外心 $\left(\frac{27}{17},\ \frac{25}{17},\ \frac{25}{17}\right)$

【答】 ㋐

【解答】

A(3, 0, 0), B(0, 4, 0), C(0, 0, 4) より重心の位置ベクトルは

$$\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}=\left(1,\ \frac{4}{3},\ \frac{4}{3}\right)\qquad \therefore\ \textbf{重心}\left(\mathbf{1},\ \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}},\ \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\right)$$

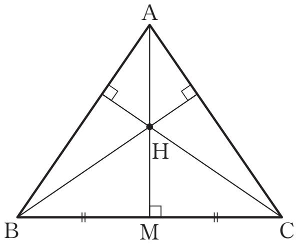


また，辺 BC の中点を M とすると，BC$=4\sqrt{2}$ であるから BM$=2\sqrt{2}$ となる．

AB$=$AC$=5$ より内心は AM を AB：BM$=5:2\sqrt{2}$ に内分する点であるから

$$\frac{2\sqrt{2}\,\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OM}}{5+2\sqrt{2}}=\frac{5-2\sqrt{2}}{17}(6\sqrt{2},\ 10,\ 10)$$

$$\therefore\ \textbf{内心}\left(\frac{\mathbf{30\sqrt{2}-24}}{\mathbf{17}},\ \frac{\mathbf{50-20\sqrt{2}}}{\mathbf{17}},\ \frac{\mathbf{50-20\sqrt{2}}}{\mathbf{17}}\right)$$



垂心を H とすると，AM⊥BC より H は線分 AM 上にあるので，実数 t を用いて $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AM}$ と表せ，BH⊥AC より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}&=(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\\&=(\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\\&=t\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}-|\overrightarrow{OA}|^2\qquad(\text{OA}\perp\text{OB},\ \text{OB}\perp\text{OC},\ \text{OC}\perp\text{OA より})\\&=17t-9=0\qquad\therefore\ t=\frac{9}{17}\end{aligned}$$

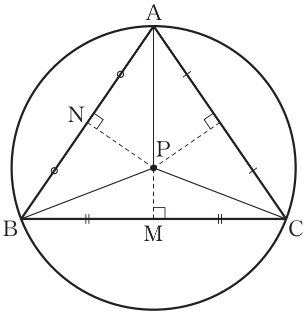
となるので

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(3,\ 0,\ 0)+\frac{9}{17}(-3,\ 2,\ 2)=\left(\frac{24}{17},\ \frac{18}{17},\ \frac{18}{17}\right)$$

$\therefore$　**垂心** $\left(\frac{24}{17},\ \frac{18}{17},\ \frac{18}{17}\right)$

外心をPとすると，Pも線分AM上にあるので，実数 u を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+u\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ と表せ，辺ABの中点をNとするとき，NP⊥ABより



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{NP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{ON}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\\&=\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+u\overrightarrow{\mathrm{AM}}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}\right)\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\\&=u\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\frac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2}{2}\\&=17u-\frac{25}{2}=0\qquad\therefore\quad u=\frac{25}{34}\end{aligned}$$

となるので，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(3,\ 0,\ 0)+\frac{25}{34}(-3,\ 2,\ 2)=\left(\frac{27}{34},\ \frac{25}{17},\ \frac{25}{17}\right)$

$\therefore$　**外心** $\left(\frac{27}{34},\ \frac{25}{17},\ \frac{25}{17}\right)$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。